

## 高二数学第3周答疑汇总

2月24日

2、数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$ ，对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $a_{n+1}=a_n+n+1$ ，则  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}} = ( \quad )$

- A.  $\frac{2020}{2019}$       B.  $\frac{2019}{1010}$       C.  $\frac{2017}{1010}$       D.  $\frac{4037}{2020}$

**思路：找递推公式求通项，根据通项特点求和。**

**【解析】** 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$ ，对任意  $n \in \mathbb{N}$  都有  $a_{n+1}=a_n+n+1$ ，即有  $n \geq 2$  时， $a_n - a_{n-1} = n$ ，可得  $a_n = a_1 + (a_2 - a_1)$

$$+ (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1), \quad n=1 \text{ 也满足上式 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2019}} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{2020} \right) = \frac{2019}{1010}.$$

3、设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ ，若  $\frac{a_1^2}{1^2} + \frac{a_2^2}{2^2} + \frac{a_3^2}{3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{n^2} = 4n - 4$ ，且  $a_n \geq 0$ ，则  $S_{100}$  等于 ( )

- A. 5048      B. 5050      C. 10098      D. 10100

**【解析】** 由  $\frac{a_1^2}{1^2} + \frac{a_2^2}{2^2} + \frac{a_3^2}{3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{n^2} = 4n - 4$ ，

**思路：利用  $a_n = \begin{cases} S_1 (n=1) \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2) \end{cases}$  求通项，再求和。**

则当  $n \geq 2$  时， $\frac{a_1^2}{1^2} + \frac{a_2^2}{2^2} + \frac{a_3^2}{3^2} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{(n-1)^2} = 4(n-1) - 4 = 4n - 8$ ，

两式相减，可得  $\frac{a_n^2}{n^2} = 4 \Rightarrow a_n^2 = 4n^2$ ，又因为  $a_n \geq 0$ ，所以  $a_n = 2n (n \geq 2)$ ，

又  $a_1 = 0$ ，所以  $S_{100} = \frac{99(a_2 + a_{100})}{2} = \frac{99(4 + 200)}{2} = 10098$ ，故选 C.

6、设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3}$ ，等差数列  $\{b_n\}$  的各项均为正数，且  $a_3 = b_2^2$ ， $a_4 = b_2 + 6b_4$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

**思路：(1) 利用  $a_n = \begin{cases} S_1 (n=1) \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2) \end{cases}$  求  $\{a_n\}$  的通项，再利用基本量法求  $\{b_n\}$  的通项；**

**(2) 观察数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  通项式的特点：等比\*等差，求和用错位相减法。**

(2) 由 (1) 知  $a_n \cdot b_n = (3n-2) \cdot 4^{n-1}$ ，**等差\*等比——错位相减法**

所以  $T_n = 1 \times 4^0 + 4 \times 4^1 + 7 \times 4^2 + \dots + (3n-5) \times 4^{n-2} + (3n-2) \times 4^{n-1}$  ① **前三后二乘以公比q**

$$4T_n = \quad 1 \times 4^1 + 4 \times 4^2 + \quad \dots \quad + (3n-5) \times 4^{n-1} + (3n-2) \times 4^n \quad \text{②}$$

① - ② 得  $-3T_n = 1 + 3(4^1 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}) - (3n-2) \times 4^n$

**等比求和公式**

$$= 1 + 3 \times \frac{4(1-4^{n-1})}{1-4} - (3n-2) \times 4^n = -3 + 3(1-n)4^n$$

所以  $T_n = (n-1) \times 4^n + 1$ ，**合并同类项**

等差数列求和公式

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

等比数列求和公式

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

忘记除以-3算出所求解

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

等比求和公式中n个数有误差，建议用另一个求和公式，避免无谓失分



2月25日

5、命题P：“ $\forall x \in [-1, 2], 2x^2 - x - m > 0$ ”，命题Q：“ $\exists x_0 \in [1, 2], \log_2 x_0 + m > 0$ ”，若“ $P \wedge Q$ ”为真命题，则实数m的取值范围是\_\_\_\_\_。

- 思路：
- ①转化求解命题p, q的最简解，根据题意取p, q的交集。
  - ②解决含参恒成立问题首选参变分离
  - ③恒成立与存在性问题可转化为求函数最值问题

不考虑函数单调性，直接代端点值计算

$$\begin{cases} 2x^2 - x - m > 0 \\ 4x - 2 - m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 2x^2 - x \\ m < 4x - 2 \end{cases}$$

计算粗心，漏写错写符号

$$m > -\log_2 x_{\min}$$



6、已知  $\lg(3x) + \lg y = \lg(x + y + 1)$ .

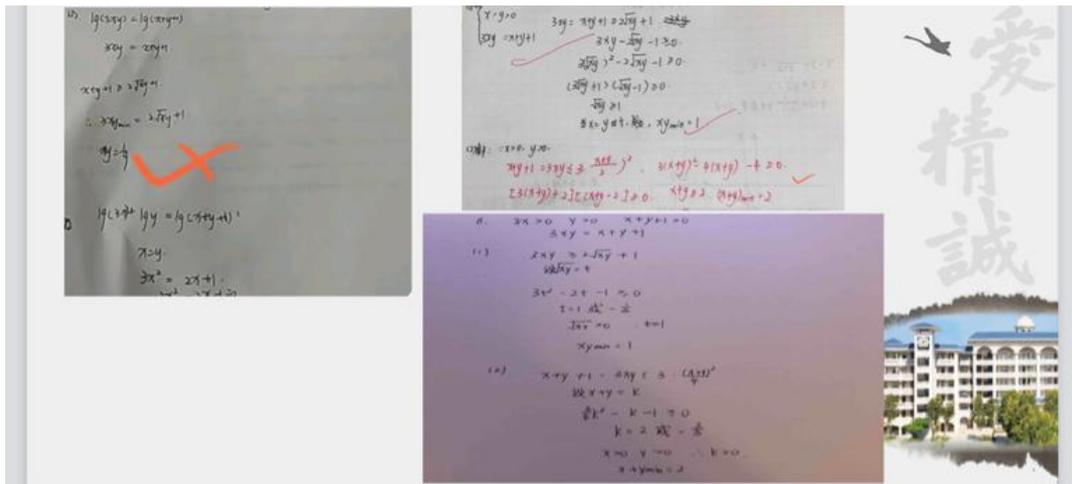
(1) 求 xy 的最小值；

(2) 求 x + y 的最小值.

思路：化简题目所给条件，利用基本不等式求最值。(知和求积，知积求和)

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

②利用基本不等式求最值，必须满足：一正二定三相等



2月26日

找不到临界角直角所形成的轨迹位置

3、在边长为1的正方形  $ABCD$  内任取一点  $P$ , 使  $\angle APB$  是钝角的概率等于 ( )

A.  $4 - \frac{\pi}{2}$       B.  $1 - \frac{\pi}{8}$       C.  $\frac{\pi}{8}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

**【解析】** 由题, 当  $\angle APB$  为直角时,  $P$  的轨迹是以  $AB$  为直径的半圆, 故当  $P$  在半圆内时满足  $\angle APB$  是钝角

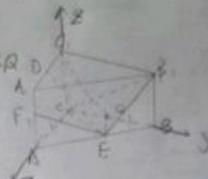
故  $\angle APB$  是钝角的概率等于  $\frac{\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{\pi}{8}$

2月27日

6. (1) 取  $BC$  中点  $P$ , 连  $EP, CP$   
 $\therefore P, E$  为  $BC, AB$  中点  
 $\therefore AC \parallel PE$   
 $\therefore AC \parallel PE$   
 $\therefore PE \perp DC$   
 $\therefore \square DCPE$   
 $\therefore DE \parallel CP$   
 $\therefore DE \perp \text{面 } CCB_1B_1$   
 $C_1P \perp \text{面 } CCB_1B_1$   
 $\therefore DE \parallel \text{面 } BCC_1B_1$

(2) 连  $BF$   
 $\therefore AC = BC, E$  为  $AB$  中点  
 $\therefore CE \perp AB$   
 $\therefore CC_1 \perp CE, CC_1 \parallel AA_1$   
 $\therefore CE \perp \text{面 } A_1ABB_1$   
 $\therefore CE \perp EF$   
 $\therefore EF^2 + EB^2 = B_1F^2$   
 $\therefore EF \perp B_1E$   
 $\therefore EF \perp \text{面 } B_1CE$

漏写条件: 两直线相交, 且含于平面内(必须写)

1) 取BC中点Q, 连接EQ, CQ. 

$\because B, E$  分别为  $BC, AB$  中点,  
 $\therefore GE \parallel AC$   
 $\because AC \parallel A_1C_1, GD \perp A_1C_1$   
 $\therefore GE \perp GD$   
 $\therefore$  四边形  $DEQG$  是平行四边形  
 $\therefore DE \parallel CQ$   
 $\because CQ \subset \text{面 } BCC_1B_1$   
 $DE \not\subset \text{面 } BCC_1B_1$   
 $\therefore DE \parallel \text{面 } BCC_1B_1$

2) 如图, 以  $CA$  为  $x$  轴,  $CB$  为  $y$  轴,  $CC_1$  为  $z$  轴建立空间直角坐标系.

$\because AA_1 = AC = BC$   
 $\therefore$  设  $AA_1 = AC = BC = 1$   
 则  $F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), E = (1, 0, \frac{1}{2}), B_1 = (0, 1, 1)$   
 $\vec{EF} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \vec{CB} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \vec{CB_1} = (0, 1, 1)$   
 设面  $B_1CE$  的法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$   

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$
 令  $x = 1$ , 则  $y = -1, z = 1$   
 $\therefore \vec{n} = (1, -1, 1)$   
 $\therefore \vec{EF} \parallel \vec{n}$   
 $\therefore EF \perp \text{面 } B_1CE$

(2) 设  $AC$  长为 2, 则  $AA_1AC = BC \Rightarrow$   
 $\therefore AA_1 \parallel BB_1, \therefore BB_1 = 2$   
 $\because ABC - A_1B_1C_1$  为直棱柱,  $E, F, D$  分别为  $AB, AA_1, AC$  的中点.  
 $\therefore FA = AF = 1$  根据勾股定理得  
 $CF = \sqrt{5}, EF = \sqrt{3}, EC = \sqrt{2}$   
 $FB_1 = \sqrt{3}, EF = \sqrt{3}, EB_1 = \sqrt{6}$   
 $\therefore CF^2 = EF^2 + EC^2$   
 $FB_1^2 = EF^2 + EB_1^2$   
 $\therefore CE \perp EF, CE \perp EB_1$   
 $CE \perp \text{面 } FEB_1$   
 $EF \perp EB_1$   
 $C \in \text{面 } FEB_1 \Rightarrow CE \perp EB_1$   
 又  $\because CE, EB_1 \subset \text{面 } B_1CE$   
 $EF \subset \text{面 } B_1CE$   
 $\therefore EF \perp \text{面 } B_1CE$

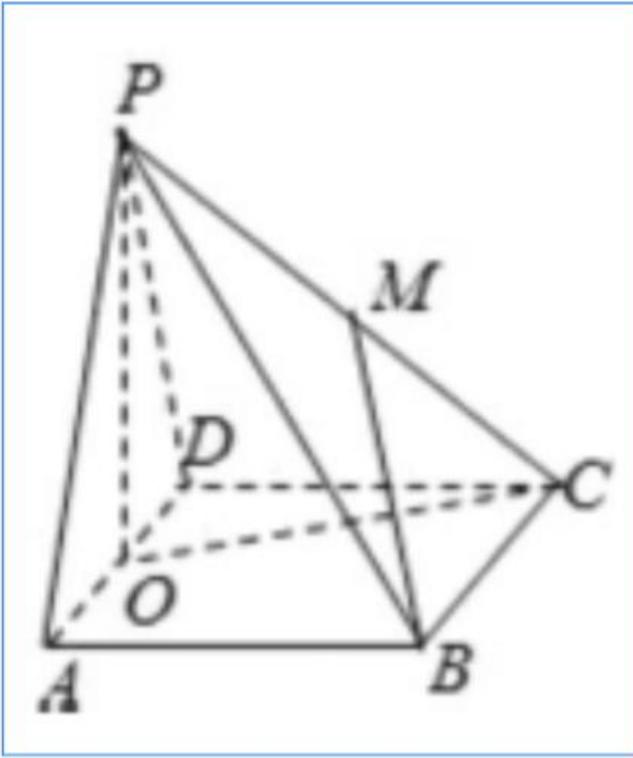
① 漏条件  
 ② 格式错误

6. 解：作BC中点G  
 连接EG, DG  
 $\because E, G$ 分别为AB, CB中点  
 $\therefore EG$ 为 $\triangle ABC$ 中位线  
 $\therefore EG \parallel \frac{1}{2}AC$   
 又 $\because \frac{1}{2}AC \parallel DG$   
 $\therefore EG \parallel DG$   
 $\therefore$ 四边形EGDG为平行四边形  
 $\therefore DE \parallel CG$   
 又 $\because DE \perp$ 面BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>,  
 $CG \subset$ 面BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>,  
 $\therefore DE \parallel$ 面BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>  
 (1)  $EF \perp B, CE$   
 $\begin{cases} EF \perp CE \leftarrow CE \perp \text{面} A, ABB_1 \\ EF \perp BE \end{cases}$   $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp A_1E \end{cases}$   
 $\therefore CE \perp$ 面A, ABB<sub>1</sub>  
 $\therefore CE \perp A_1E$   
 $\therefore A_1E \parallel$ 面A, ABB<sub>1</sub>  
 同法  
 设A, A<sub>1</sub>=2, 则B, B<sub>1</sub>为1  
 (中位线得等过程)  
 这个特权是老师专属你无权使用

2月28日

4. (1) 取PC中点E, 连接AE, DE  
 $\because E, D$ 分别为PA, PC中点  
 $\therefore ED \parallel \frac{1}{2}AC$   
 $\therefore OD \parallel \frac{1}{2}AC$   
 $\therefore OD \parallel ED$   
 $\therefore OE \parallel AD$   
 $\therefore OE \parallel$ 面PCD  
 (2)  $DE \subset$ 面PCD  
 $CD \cap PD = D$   
 (3)  $CD \perp AD, AD \perp PD, AD \perp PD$   
 $\therefore AD \perp$ 面PCD  
 $\therefore AD \perp CD$   
 $PA = PD = \frac{1}{2}AD = 1$   
 $AP^2 + PD^2 = AD^2$   
 $\therefore AP \perp PD$   
 $AP \perp$ 面PCD  
 跟昨天同样的问题, 漏条件

5、已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形， $PA=PD=\sqrt{5}$ ，平面  $ABCD \perp$  平面  $PAD$ 。  
 $M$  是  $PC$  的中点， $O$  是  $AD$  的中点，则直线  $BM$  与平面  $PCO$  所成角的正弦值是\_\_\_\_\_。



不会建系，点坐标算不对，忘记公式

### 林泳诗思维导图 实用就好

法量

- 一般直线  $ax+by+z$
- 设  $\vec{n}=(x,y,z)$
- $\vec{n} \cdot \vec{a}=0$
- $\vec{n} \cdot \vec{b}=0$
- 取组解

条件:  $\vec{a} \cdot \vec{b}=0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

平面:  $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$

平面:  $\vec{a}_1=k\vec{a}_2$

条件:  $\vec{a} \cdot \vec{b}=0 \rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

平面:  $\mu\vec{a} \rightarrow \mu=k\vec{b} = a_1=k_1b_1$   
 $a_2=k_2b_2$   
 $a_3=k_3b_3$

平面:  $\mu \perp \nu \rightarrow \mu \cdot \nu = 0 \rightarrow \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3=0$

空间

异面直线的夹角

平面

二面角

$\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

$\cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|} = \sin \theta$

$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$