高二数学第 3 周答疑汇总

2 月 24 日

2、数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意 n∈ N 都有 $a_{n+1}=a_n+n+1$，则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}}=$（　　）

A. $\frac{2020}{2019}$　　B. $\frac{2019}{1010}$　　C. $\frac{2017}{1010}$　　D. $\frac{4037}{2020}$

思路：找递推公式求通项，根据通项特点求和。

【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意 n∈ N 都有 $a_{n+1}=a_n+n+1$，即有 n≥2 时，$a_n-a_{n-1}=n$，可得 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)++(a_n-a_{n-1})=1+2+3++n=\frac{1}{2}n(n+1)$，$n=1$ 也满足上式 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}++\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=2\left(1-\frac{1}{2020}\right)=\frac{2019}{1010}$.

、设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，若 $\frac{a_1^2}{1^2}+\frac{a_2^2}{2^2}+\frac{a_3^2}{3^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{n^2}=4n-4$，且 $a_n\ge 0$，则 S_{100} 等于（　　）

.. 5048　　B. 5050　　C. 10098　　D. 10100

【解析】由 $\frac{a_1^2}{1^2}+\frac{a_2^2}{2^2}+\frac{a_3^2}{3^2}+\ldots+\frac{a_n^2}{n^2}=4n-4$，　　思路：利用 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\ge 2)\end{cases}$ 求通项，再求和，

则当 $n\ge 2$ 时，$\frac{a_1^2}{1^2}+\frac{a_2^2}{2^2}+\frac{a_3^2}{3^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{(n-1)^2}=4(n-1)-4=4n-8$，

两式相减，可得 $\frac{a_n^2}{n^2}=4\Rightarrow a_n^2=4n^2$，又因为 $a_n\ge 0$，所以 $a_n=2n\ (n\ge 2)$，

又 $a_1=0$，所以 $S_{100}=\frac{99(a_2+a_{100})}{2}=\frac{99(4+200)}{2}=10098$，故选 C.

6、设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}$，等差数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_3=b_2^2$，$a_4=b_2+6b_4$.

(1) 求数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

思路：(1) 利用 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\ge 2)\end{cases}$ 求 $\{a_n\}$ 的通项，再利用基本量法求 $\{b_n\}$ 的通项；

(2) 观察数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 通项式的特点：等比*等差，求和用错位相减法。

(2) 由 (1) 知 $a_n\cdot b_n=(3n-2)\cdot 4^{n-1}$，等差*等比——错位相减法

所以 $T_n=1\times 4^0+4\times 4^1+7\times 4^2+\cdots+(3n-5)\times 4^{n-2}+(3n-2)\times 4^{n-1}$　①　前三后二

乘以公比q

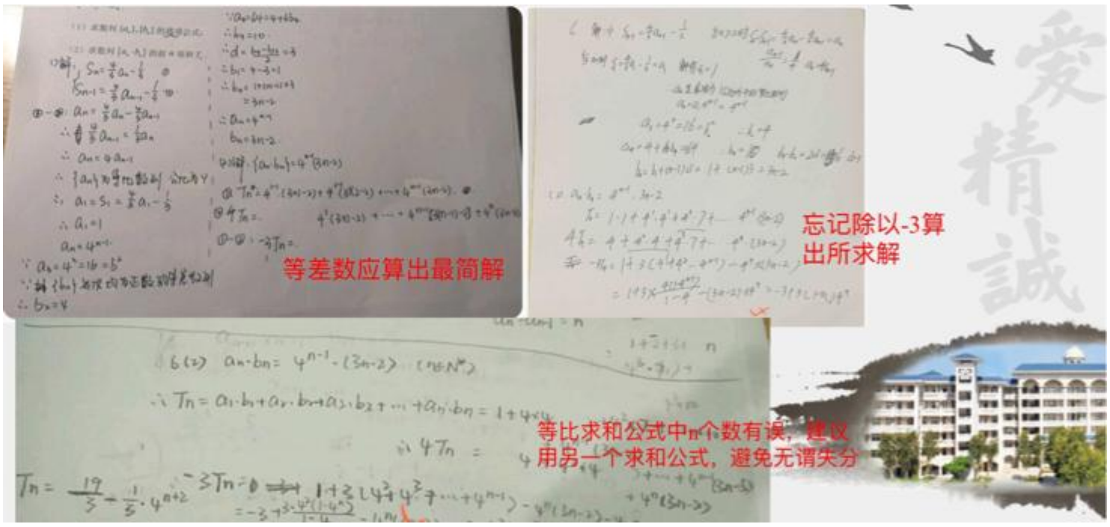
$4T_n=\qquad 1\times 4^1+4\times 4^2+\qquad\cdots\qquad+(3n-5)\times 4^{n-1}+(3n-2)\times 4^n$　②

①-②得 $-3T_n=1+3(4^1+4^2+\cdots+4^{n-1})-(3n-2)\times 4^n$

等比求和公式

$=1+3\times\frac{4(1-4^{n-1})}{1-4}-(3n-2)\times 4^n=-3+3(1-n)4^n$

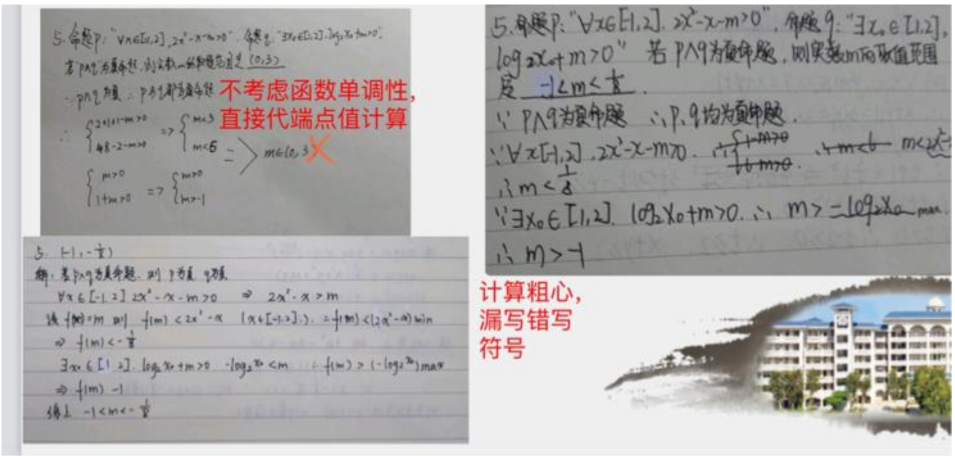
所以 $T_n=(n-1)\times 4^n+1$.　合并同类项



2 月 25 日

5、命题 p：“$\forall x\in[-1,2], 2x^2-x-m>0$”，命题 q：“$\exists x_0\in[1,2], \log_2 x_0+m>0$”，若“$p\wedge q$”为真命题，则实数 m 的取值范围是__________.

思路：①转化求解命题p，q的最简解，根据题意取p，q的交集。
②解决含参恒成立问题首选参变分离
③恒成立与存在性问题可转化为求函数最值问题



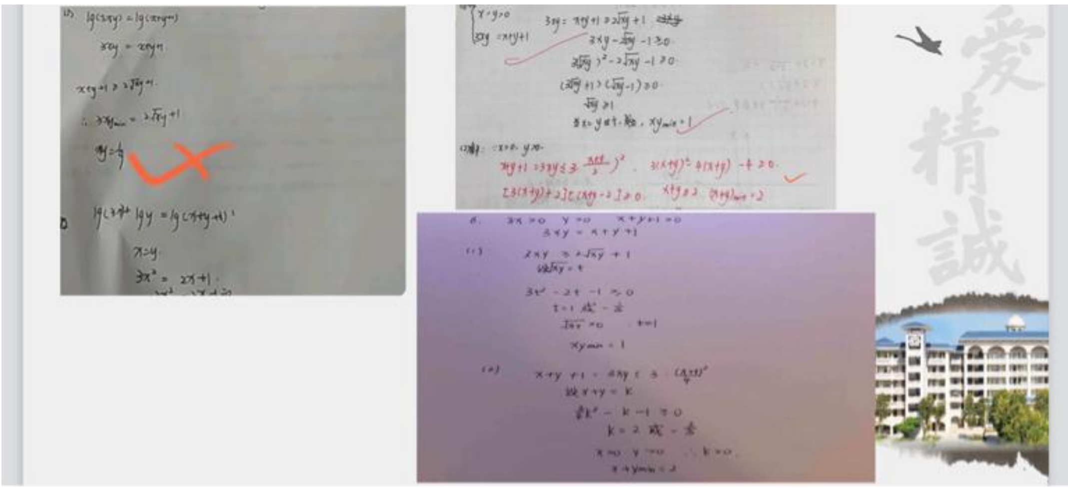
6、已知 $\lg(3x)+\lg y=\lg(x+y+1)$.

(1) 求 xy 的最小值；

(2) 求 x+y 的最小值.

思路：化简题目所给条件，利用基本不等式 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$. 求最值。(知和求积，知积求和)

②利用基本不等式求最值，必须满足：一正二定三相等



2 月 26 日

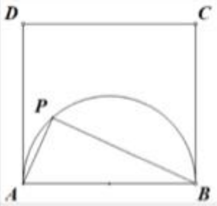
找不到临界角直角所形成的轨迹位置

3、在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 内任取一点 P，使 $\angle APB$ 是钝角的概率等于（　　）

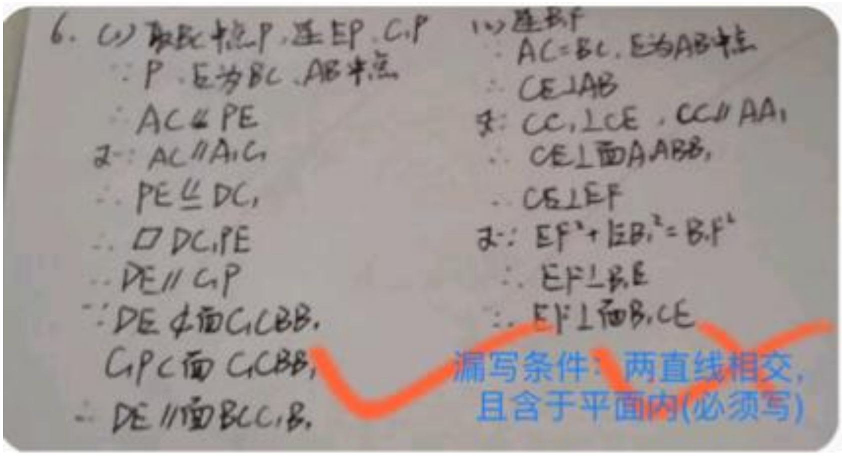
A. $4-\dfrac{\pi}{2}$　　B. $1-\dfrac{\pi}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{8}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

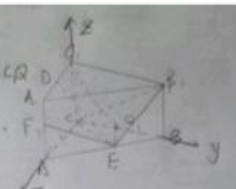
【解析】由题,当 $\angle APB$ 为直角时,P 的轨迹是以 AB 为直径的半圆,故当 P 在半圆内时满足 $\angle APB$ 是钝

故 $\angle APB$ 是钝角的概率等于 $\dfrac{\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}=\dfrac{\pi}{8}$



2 月 27 日





(1) 取BC中点Q，连接EQ，C_1Q

∵ Q，E分别为BC，AB中点，

∴ $QE \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC$

∵ $AC \parallel A_1C_1$，$C_1D = \frac{1}{2}A_1C_1$

∴ $QE \underline{\parallel} C_1D$

∴ 四边形$DEQC_1$是平行四边形

∴ $DE \parallel C_1Q$

又 $C_1Q \in$ 面BCC_1B_1 符号错误：直线含于平面

$DE \not\subset$ 面BCC_1B_1

∴ $DE \parallel$ 面BCC_1B_1

(2) 如图，以CA为x轴，CB为y轴，CC_1为z轴建立空间直角坐标系.

∵ $A_1A = AC = BC$

∴ 设$AA_1 = AC = BC = 1$ 点的坐标不用等号，向量才用等号

则 E $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$，$F = (1, 0, \frac{1}{2})$，$B_1 = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，$\overrightarrow{CE} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ $\overrightarrow{CB_1} = (0, 1, 1)$

设面B_1CE的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$.

$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ 令 $x = 1$，则 $y = -1$，$z = 1$

∴ $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

∴ $\overrightarrow{EF} \parallel \vec{n}$

∴ $EF \perp$ 平面B_1CE.

(2) 设 AC长为2. 则$AA_1 = AC = BC = 2$.

∵ $AA_1 \parallel BB_1$ ∴ $BB_1 = 2$.

∵ $ABC-A_1B_1C_1$为直棱柱. E、F、D分别为 AB、AA_1、A_1C_1的中点.

∴ ~~FA=AE=1~~ 根据勾股定理得

$CF = \sqrt{5}$，$EF = \sqrt{3}$，$EC = \sqrt{2}$.

$FB_1 = 3$，$EF = \sqrt{3}$，$EB_1 = \sqrt{6}$.

∴ $CF^2 = EF^2 + EC^2$

$FB_1^2 = EF^2 + EB_1^2$

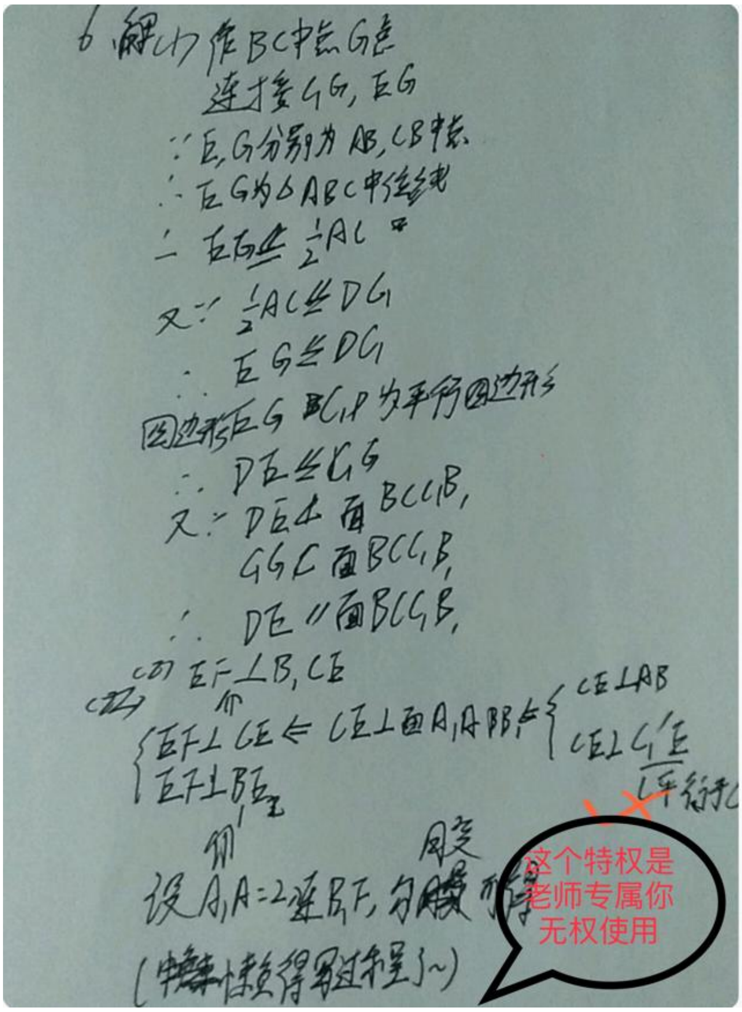
∴ $EF \perp CE$，

$EF \perp EB_1$. $CE \cap EB_1 = E$

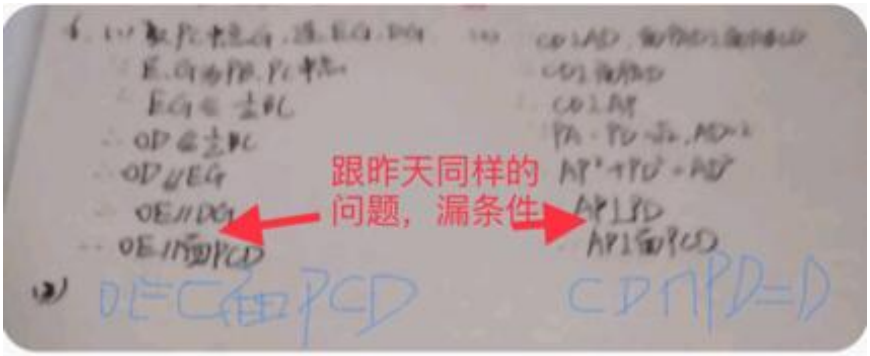
又∵ CE、$EB_1 \subset$ 平面B_1CE ①漏条件 ②格式错误

$EF \not\subset$ 平面B_1CE

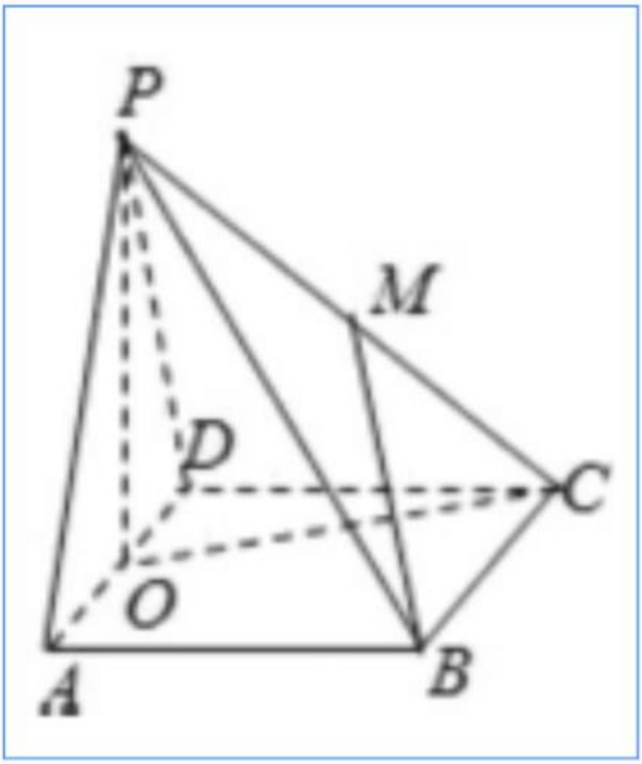
∴ $EF \perp B_1CE$.



2 月 28 日



5、已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=PD=\sqrt{5}$，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD，M 是 PC 的中点，O 是 AD 的中点，则直线 BM 与平面 PCO 所成角的正弦值是__________.



不会建系，点坐标算不对，忘记公式