第 1 周高二数学疑难解答

【2 月 10 日】

问题 1：《步步高》蓝皮书第 58 页，跟踪训练 2（2）

跟踪训练 2　当实数 m 为何值时，复数 $\lg(m^2-2m-7)+(m^2+5m+6)i$ 是：

(1)纯虚数；(2)实数．

正解：

(2)复数 $\lg(m^2-2m-7)+(m^2+5m+6)i$ 是实数，

则 $\begin{cases} m^2-2m-7>0, \\ m^2+5m+6=0, \end{cases}$ 解得 $m=-2$ 或 $m=-3$.

学生常见错误：只是列出 $m^2+5m+6=0$，并没有考虑真数大于 0.

问题 2：《步步高》黄皮书第 117 页，第 3 题

①若 x，$y\in \mathbf{C}$，则 $x+yi=1+i$ 的充要条件是 $x=y=1$；

③若 x，$y\in \mathbf{C}$，$x^2+y^2=0$，则只有 $x=y=0$.

正解：

①由于 x，$y\in \mathbf{C}$，∴当 $x=i$，$y=-i$ 时，$x+yi=1+i$，故①是假命题；

③当 $x=1$，$y=i$，$x^2+y^2=0$ 成立，∴③是假命题．

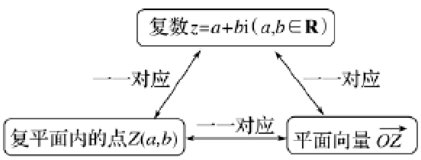
学生常见错误：审题不仔细，没有注意到题目条件所给的 x, y 是复数。

【2 月 11 日】

问题 1：《步步高》蓝皮书第 59 页，知识点二

知识点二　复数的几何意义

复数 $z=a+bi(a，b\in \mathbf{R})$与复平面内的点__________及以原点为起点，点 $Z(a，b)$为终点的向量$\overrightarrow{OZ}$是一一对应的．



正解：Z(a,b)

复数的几何意义是将复数的实部和虚部组成的有序实数对，对应到复平面中的点的坐标，再

对应到平面向量$\overrightarrow{OZ}$，体现了数形结合的思想。

问题 2：《步步高》蓝皮书第 59 页，思考辨析

2．在复平面内，虚轴上的点所对应的复数都是纯虚数．(　　)

正解：×

学生常见错误：没有真正理解虚轴的概念，虚轴上的点，除原点外，表示纯虚数。

问题 3：《步步高》蓝皮书第 60 页，例 2

例 2　在复平面上，点 A，B，C 对应的复数分别为 $1+4i$，$-3i$，2，O 为复平面的坐标原点．

(1)求向量$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AC}$对应的复数；

(2)求平行四边形 $ABCD$ 的顶点 D 对应的复数．

正解：

解　(1)由已知得$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$所对应的复数分别为 $1+4i$，$-3i$，2，

于是$\overrightarrow{OA}=(1,4)$，$\overrightarrow{OB}=(0,-3)$，$\overrightarrow{OC}=(2,0)$，

因此$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(1,1)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,-4)$，

故$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$对应的复数为 $1+i$，$\overrightarrow{AC}$对应的复数为 $1-4i$.

(2)方法一　由已知得点 A，B，C 的坐标分别为$(1,4)$，$(0,-3)$，$(2,0)$，则 AC 的中点为$\left(\frac{3}{2},2\right)$，

由平行四边形的性质知 BD 的中点也是$\left(\frac{3}{2},2\right)$，若设 $D(x_0,y_0)$，则有$\begin{cases}\frac{0+x_0}{2}=\frac{3}{2},\\ \frac{-3+y_0}{2}=2,\end{cases}$　解得

$\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=7,\end{cases}$　故 $D(3,7)$．

学生常见错误：（1）$\overrightarrow{AC}=1-4i$；（2）只是求出顶点 D 的坐标，没有求其对应的复数。

复数与平面向量可以实现一一对应，但不代表向量和复数相等，所以在表述上要注意，我们只能说$\overrightarrow{AC}$对应的复数为$\overrightarrow{AC}=1-4i$。

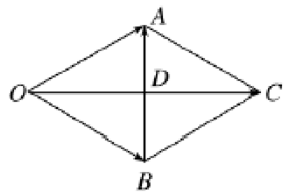
【2 月 12 日】

问题 1：《步步高》蓝皮书第 62 页，典例（2）

(2)已知 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，$|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{3}$，求$|z_1-z_2|$.

正解：

解　如图，$\overrightarrow{OA}$对应的复数为 z_1，$\overrightarrow{OB}$对应的复数为 z_2，



根据复数加减法的几何意义，

由$|z_1|=|z_2|$知，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 是菱形．

即$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，$\overrightarrow{OC}$对应的复数为 z_1+z_2，$\therefore|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$.

在$\triangle AOC$ 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AC}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$，

$\therefore\angle AOC=30°$.同理得$\angle BOC=30°$，

$\therefore\triangle OAB$ 为等边三角形，则$|\overrightarrow{BA}|=1$，$\overrightarrow{BA}$表示的复数为 z_1-z_2，$\therefore|z_1-z_2|=1$.

学生常见错误：没有理解复数模、加减法的几何意义。

本题解法二：待定系数法，设 $z_1=a+bi,z_2=x+yi(a,b,x,y\in R)$，代入求模。

问题 2：《步步高》黄皮书第 121 页，第 9 题

9．如果一个复数与它的模的和为 $5+\sqrt{3}$i，那么这个复数是________．

正解：

答案　$\frac{11}{5}+\sqrt{3}$i

解析　设复数 $z=x+y\mathrm{i}(x，y\in\mathbf{R})$，则 $x+y\mathrm{i}+\sqrt{x^2+y^2}=5+\sqrt{3}\mathrm{i}$，

$\therefore\begin{cases}x+\sqrt{x^2+y^2}=5，\\ y=\sqrt{3}，\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}x=\frac{11}{5}，\\ y=\sqrt{3}.\end{cases}$

学生疑问：解方程 $x+\sqrt{x^2+3}=5$

先移项，再左右两边平方求解 x，如下：

$\sqrt{x^2+3}=5-x \Rightarrow x^2+3=(5-x)^2 \Rightarrow x=\frac{11}{5}$

【2 月 13 日】

问题：《步步高》蓝皮书第 64 页，典例

典例 把复数 z 的共轭复数记作 $\overline{z}$，已知 $(1+2i)\overline{z}=4+3i$，求 z.

正解：

解 设 $z=a+bi(a，b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-bi$，

由已知得 $(1+2i)(a-bi)=(a+2b)+(2a-b)i=4+3i$，

由复数相等的定义知，$\begin{cases} a+2b=4， \\ 2a-b=3， \end{cases}$ 得 $a=2$，$b=1$，

所以 $z=2+i$.

学生常见错误：在待定系数，设 $z=a+bi$ 时，漏了加上条件 $a,b\in R$

【2 月 14 日】

问题 1：《步步高》第 66 页，例 3（1）

例 3 (1)计算：$\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2\,018}+\frac{(4-8i)^2-(-4+8i)^2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}i}$；

正解：

解 (1)原式 $=\frac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right]^{1\,009}+\frac{(4-8i+8i-4)(4-8i+4-8i)}{\sqrt{11}-\sqrt{7}i}=i+(-i)^{1\,009}+0=0.$

学生疑问：不会处理 $(\frac{\sqrt{2}}{1+i})^{2018}$

当次数较高时，不妨先计算次数较低的式子，比如本题，先计算 $(\frac{\sqrt{2}}{1+i})^2$，得 $-i$，再计算 $(-i)^{2018}$。

问题 2：《步步高》黄皮书第 123 页，第 4 题

4．若$|z-1|=|z+1|$，则复数 z 对应的点在(　　)

A．实轴上　　B．虚轴上

C．第一象限　　D．第二象限

正解：

答案　B

解析　∵$|z-1|=|z+1|$，∴点 Z 到$(1,0)$和$(-1,0)$的距离相等，即点 Z 在以$(1,0)$和$(-1,0)$为端点的线段的中垂线上．

学生疑问：没有理解复数减法的几何意义，$|z_1-z_2|$表示复平面上，复数 z_1,z_2 所对应的两点 Z_1,Z_2 之间的距离。