《数列》知识梳理

资料整理人：吴林

一、数列概念

1. 数列的定义：按照一定顺序排列的一列数称为数列，数列中的每个数称为该数列的项.

2. 通项公式：如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号之间可以用一个式子表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式，即 $a_n=f(n)$.

3. 递推公式：如果已知数列$\{a_n\}$的第一项（或前几项），且任何一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系可以用一个式子来表示，即 $a_n=f(a_{n-1})$ 或 $a_n=f(a_{n-1},a_{n-2})$，那么这个式子叫做数列 $\{a_n\}$ 的递推公式. 如数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_n=2a_n+1$，其中 $a_n=2a_n+1$ 是数列$\{a_n\}$的递推公式.

4. 数列的前 n 项和与通项的公式

① $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$； ② $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$.

5. 数列的表示方法：解析法、图像法、列举法、递推法.

6. 数列的分类：有穷数列，无穷数列；递增数列，递减数列，摆动数列，常数数列等。

①递增数列：对于任何 $n\in N_+$，均有 $a_{n+1}>a_n$.

②递减数列：对于任何 $n\in N_+$，均有 $a_{n+1}<a_n$.

③摆动数列：例如：$-1,1,-1,1,-1,\cdots$.

④常数数列：例如：6, 6, 6, 6, …….

二、等差数列

1. 等差数列的概念

如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数 d，这个数列叫做等差数列，常数 d 称为等差数列的公差.

2. 通项公式与前 n 项和公式

（1）通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，a_1 为首项，d 为公差.

（2）前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或 $S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$.

3. 等差中项

如果 a,A,b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项.

即：A 是 a 与 b 的等差中项 $\Leftrightarrow 2A=a+b \Leftrightarrow a$，$A$，$b$ 成等差数列.

4. 等差数列的判定方法

（1）定义法：$a_{n+1}-a_n=d$（$n\in N_+$，d 是常数）$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；

（2）中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$（$n\in N_+$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

5. 等差数列的常用性质

（1）$a_n=a_m+(n-m)d$；$a_n=an+b$（a，b 是常数）；$S_n=an^2+bn$（a，b 是常数，$a\neq 0$）

（2）若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in N_+)$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；

三、等比数列

1. 等比数列的概念

如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数 $q(q\neq 0)$，这个数列叫做等比数列，常数 q 称为等比数列的公比.

2. 通项公式与前 n 项和公式

（1）通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$，a_1 为首项，q 为公比 .

（2）前 n 项和公式：①当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$

②当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

3. 等比中项

如果 a,G,b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项.

即：G 是 a 与 b 的等差中项 $\Leftrightarrow$ a，A，b 成等差数列 $\Rightarrow$ $G^2=a\cdot b$.

4. 等比数列的判定方法

（1）定义法：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$（$n\in N_+$，$q\neq 0$ 是常数）$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 是等比数列；

（2）中项法：$a_{n+1}{}^2=a_n\cdot a_{n+2}$（$n\in N_+$）且 $a_n\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 是等比数列.

5. 等比数列的常用性质

（1）$a_n=a_m\cdot q^{n-m}(n,m\in N_+)$

（2）若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in N_+)$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

（3）若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，则 S_k、$S_{2k}-S_k$、$S_{3k}-S_{2k}$、$S_{4k}-S_{3k}$ 是等比数列.

四、由递推式求通项公式

1、已知关系式 $a_{n+1}=a_n+f(n)$，可利用累加法或迭代法；

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

例：已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2,a_n=a_{n-1}+2n-1(n\geq 2)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

2、已知关系式 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$，可利用累乘法. $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1$

例、已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}(n\geq 2),a_1=2$，求求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

3、构造新数列

递推关系形如“$a_{n+1}=pa_n+q$”，利用待定系数法构造等比数列求解。

设原式等价于 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$，求出 $\lambda=\dfrac{q}{p-1}$，从而数列 $\left\{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}+\dfrac{q}{p-1}\right\}$ 是一个首项为 $a_1+\dfrac{q}{p-1}$，公比为 p 的等比数列。

4、由 S_{n} 和 a_n 的关系求通项式。

这类问题主要是利用 $a_n=\begin{cases}S_1, & (n=1)\\ S_n-S_{n-1}, & (n\geqslant 2)\end{cases}$ 求通项公式. 特别需注意的是，最后应验证分段表示的公式是否能合并，即验证 $n\geqslant 2$ 时的公式对 $n=1$ 是否适用.

由已知关系式，将 n 变为 $n-1$ 或 $n+1$ 再写出一个类似的关系式，将两个关系式的两边分别

相减，从而将关系式中的和（如S_n）转化为项.

五、证明数列是等差或等比数列

证明一个数列为等差数列的方法：1. 定义法：$a_{n+1}-a_n=d(\text{常数})$

2. 中项法：$a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n(n\geq 2)$

证明一个数列为等比数列的方法：1. 定义法：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(\text{常数})$

2. 中项法：$a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(a_n)^2(n\geq 2)$

六、求数列的前 n 项和

基本方法：

1）公式法，

2）并项求和或分组求和法.

3)裂项相消法,数列的常见拆项有：$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$；$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

4）倒序相加法；

5）错位相减法；如果数列满足$c_n=a_nb_n$，且$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，常用错位相减法求数列的和。